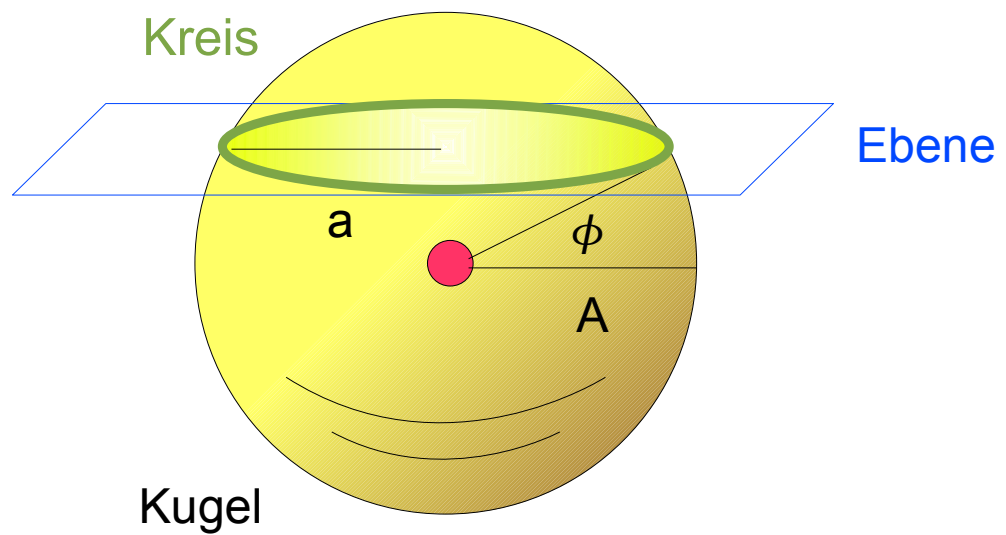


DIETER EGGER

ÜBER EINE SPEZIELLE METRIK



EIN GEDANKENEXPERIMENT

Vorwort

Ausgehend von einem zunächst expandierenden und dann wieder kontrahierenden Universum soll über eine dazu passende Metrik der zugehörige Energie-Impuls-Tensor aus den Einsteinschen Feldgleichungen ermittelt werden.

Die Metrik wird zunächst aus Anschaulichkeitsgründen für eine 2-dim Raum-Zeit so konstruiert, dass ein 1-dim Lebensraum als dynamische Teilmenge der 2-dim Oberfläche einer 3-dim Kugel hervor geht.

In dazu analoger Weise wird die Metrik auf eine 4-dim Raum-Zeit „ausgedehnt“ und in die Feldgleichungen eingebracht.

Anregungen und Kommentare bitte an
dr.egger at alice.de

Dieter Egger, München, den 30.08.12

Über den Autor

Der Autor ist an der TU München als Privatdozent im Bereich „Geodäsie und Geoinformation“ tätig. Dort unterrichtet er „Einführung in die objektorientierte Programmierung“ für Master im 1. und 2. Semester. Außerdem erzählt er den Studierenden im Rahmen des Projektes „Geodätische Astronomie“ etwas über die Grundlagen der Astronomie und Kosmologie. Und eben letzteres hat dazu geführt, dass er die existierenden Modelle hinterfragt hat. Als Hilfsmittel dienten dazu Computer mit Software für die numerische Integration von Bewegungsgleichungen und für die symbolische Formelmanipulation (REDUCE).

Hinweis

Die vorliegende Schrift wurde als Online-Publikation (DOI: 10.2370/OND000000000142)

<http://www.shaker.de/shop/OND-00000-0000142>

im Shaker Verlag

<http://www.shaker.de/>

veröffentlicht.

Inhalt

Vorwort	3
Über den Autor	3
Hinweis	3
Inhalt	5
Grundlagen	7
Idee.....	7
Kenngrößen.....	8
Metrik & Co.	8
Wegelement und Metrik.....	8
Metrik der Kugeloberfläche.....	8
Metrik-Tensor.....	9
Christoffel-Symbole.....	9
Kovariante Ableitung.....	10
Krümmungs-Tensor.....	11
Ricci-Tensor.....	12
Krümmungs-Skalar.....	12
Einstein-Tensor.....	12
Einsteinsche Feldgleichungen.....	13
Bewegungsgleichung.....	13
Mehr Dimensionen	14
Krümmungs-Skalar.....	14
Einstein-Tensor.....	14
3-dim Raum-Zeit.....	14
4-dim Raum-Zeit.....	15
Energie-Impuls-Tensor.....	15
Einsteinsche Feldgleichungen.....	16
Interpretationsversuch.....	18
Zusammenfassung	19
Dank	19
Literatur	20
Anhang	21
REDUCE.....	21
2-dim-Raum-Zeit.....	21
4-dim-Raum-Zeit.....	24

Grundlagen

Idee

Eine Ebene „schwebt“ gleichmäßig durch eine Kugel und schneidet aus der Kugeloberfläche jeweils einen Kreisumfang (Radius a) aus, der als „Lebensraum“ für 1-dimensionale „Lebewesen“ dienen soll. Die zeitliche Entwicklung wird durch die Abfolge der Kreisumfänge bestimmt.

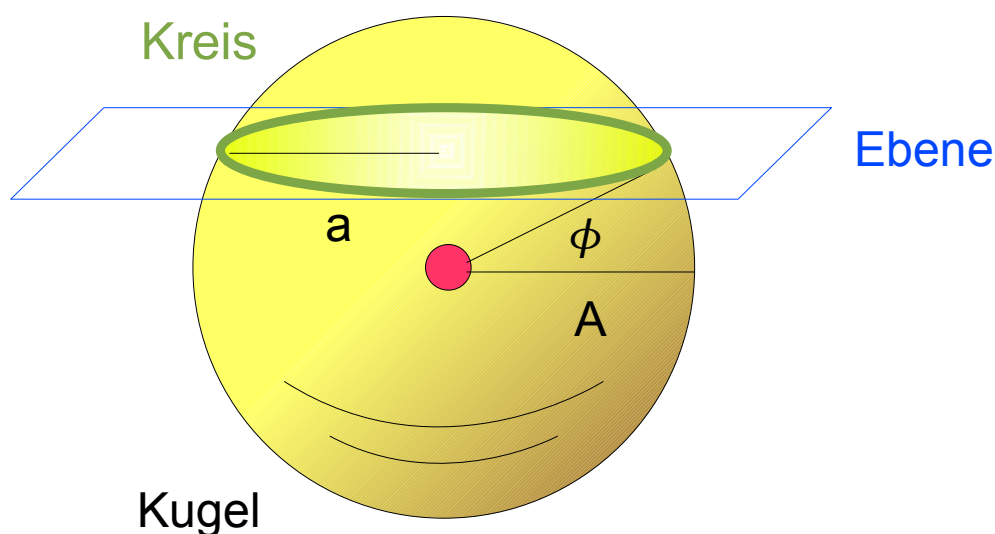


Abbildung 1: Die Ebene schwebt gleichmäßig durch die Kugel und liefert dabei als Schnittmenge mit der Kugeloberfläche ein zunächst expandierendes und dann wieder kontrahierendes eindimensionales Universum. Durch die Abfolge der Kreisumfänge wird eine zeitliche Entwicklung ermöglicht.

Wegen der (postulierten) äußeren Dynamik gilt

$$\phi = \arcsin(t) \quad \text{bzw.} \quad \sin \phi = t, \quad \text{wobei } t \text{ linear von } -1 \text{ bis } +1 \text{ läuft.}$$

t ist ein freier „kosmischer“ Parameter, der die Veränderlichkeit der 1-dim Welt garantiert.

Die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen lautet (siehe auch [Egger]):

Eine $(n-1)$ -dim Hyperebene „schwebt“ gleichmäßig durch eine n -dim Hyperkugel (Radius A) und schneidet aus der $(n-1)$ -dim Hyperoberfläche jeweils eine $(n-2)$ -dim Hyperoberfläche (Radius a) aus, die als „Lebensraum“ für $(n-2)$ -dim „Lebewesen“ dienen soll.

Kenngrößen

Wir wählen einen Parameter t („kosmische Zeit“) so, dass er linear von -1 bis $+1$ läuft, und berechnen die Kenngrößen Ausdehnung, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Größe	als Funktion von t	im Verhältnis zur Ausdehnung
Ausdehnung (Radius)	$a(t) = A\sqrt{1-t^2} = A(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	1
Geschwindigkeit	$\frac{da}{dt} = \frac{-At}{\sqrt{1-t^2}} = -At(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{t}{1-t^2}$
Beschleunigung	$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{A}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} = -A(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{(1-t^2)^2}$

Tabelle 1: Kenngrößen des 1-dimensionalen Universums. A ist die maximale Ausdehnung und entspricht dem Radius der 3-dimensionalen Kugel.

Die stets vorhandene Beschleunigung ist eine dem System innewohnende Eigenschaft. Zwei Beobachter werden daher den Eindruck gewinnen, dass eine anziehende „Kraft“ zwischen ihnen wirkt, obwohl sie nicht als solche erkennbar ist. Zum Zeitpunkt $t=0$ erreicht sie ihr Maximum $-A$, das aber dem Betrage nach ein Minimum darstellt.

Metrik & Co.

Wegelement und Metrik

Allgemein formulieren wir ein Wegelement bzw. sein Quadrat als

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

und ermitteln den zurück gelegten Weg durch

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt$$

mit $g_{\mu\nu}$ Metrik bzw. Pseudo-Metrik unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention, dass über oben und unten doppelt auftretende Indices zu summieren ist.

Metrik der Kugeloberfläche

Wir beschreiben die Oberfläche der 3-dim Kugel mit Radius A als Funktion im 3-dim Raum (Länge λ , Breite ϕ) und berücksichtigen die oben postulierte Dynamik $\sin \phi = t$:

$$f: t, \lambda \rightarrow A \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \cos \lambda \\ \sqrt{1-t^2} \sin \lambda \\ t \end{pmatrix}$$

und erhalten die Komponenten der Metrik

$$g_{00}(t, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{A^2}{1-t^2}$$

$$g_{01} = g_{10} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

und

$$g_{11}(t, \lambda) = \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = A^2(1-t^2)$$

Metrik-Tensor

Aus dem eben berechneten (kovarianten) Metrik-Tensor

$$g_{\mu\nu}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{A^2}{1-t^2} & 0 \\ 0 & A^2(1-t^2) \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $\det(g_{\mu\nu}) = A^4$ bestimmen wir leicht den kontravarianten Metrik-Tensor

$$g^{\mu\nu}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2(1-t^2)} \end{pmatrix}.$$

Christoffel-Symbole

Bilden wir zunächst die partiellen Ableitungen der Metrik-Koeffizienten

$$g_{00,0} = g_{tt,t} = A^2 \frac{\partial}{\partial t} (1-t^2)^{-1} = -A^2 (1-t^2)^{-2} (-2t) = 2A^2 \frac{t}{(1-t^2)^2}$$

$$g_{00,1} = g_{t\lambda} = 0, \quad g_{01,0} = g_{t\lambda,t} = 0, \quad g_{01,1} = g_{t\lambda,\lambda} = 0, \quad g_{10,0} = g_{\lambda t,t} = 0, \quad g_{10,1} = g_{\lambda t,\lambda} = 0$$

$$g_{11,0} = g_{\lambda\lambda,t} = -2A^2 t$$

$$g_{11,1} = g_{\lambda\lambda,\lambda} = 0$$

und daraus „zu Fuss“ mit $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})$ die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho 0,0} + g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho}) = \frac{1}{2} [g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) + g^{01} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1})]$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{A^2} 2A^2 \frac{t}{(1-t^2)^2} = \frac{t}{1-t^2}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{1\rho} (g_{\rho 0,0} + g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho}) = \frac{1}{2} [g^{10} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) + g^{11} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1})] = 0$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho 0,1} + g_{\rho 1,0} - g_{01,\rho}) = \frac{1}{2} [g^{00} (g_{00,1} + g_{01,0} - g_{01,0}) + g^{01} (g_{10,1} + g_{11,0} - g_{01,1})] = 0$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{1\rho} (g_{\rho 0,1} + g_{\rho 1,0} - g_{01,\rho}) = \frac{1}{2} [g^{10} (g_{00,1} + g_{01,0} - g_{01,0}) + g^{11} (g_{10,1} + g_{11,0} - g_{01,1})]$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{A^2(1-t^2)} (-2A^2 t) = -\frac{t}{1-t^2}$$

$$\Gamma_{10}^0 = 0$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = -\frac{t}{1-t^2}$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho 1,1} + g_{\rho 1,1} - g_{11,\rho}) = \frac{1}{2} [g^{00} (g_{01,1} + g_{01,1} - g_{11,0}) + g^{01} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1})]$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (-g_{11,0}) = \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{A^2} (2A^2 t) = (1-t^2)t$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1\rho} (g_{\rho 1,1} + g_{\rho 1,1} - g_{11,\rho}) = \frac{1}{2} [g^{10} (g_{01,1} + g_{01,1} - g_{11,0}) + g^{11} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1})] = 0$$

Berechnungen mit REDUCE (siehe Anhang) bestätigen diese Ergebnisse.

Kovariante Ableitung

Aus dem Vektor $B^\mu = \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \end{pmatrix}$ und der kovarianten Ableitungsvorschrift $B^\mu_{;\nu} = B^\mu_{,\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu B^\sigma$,

wobei

$B^\mu_{,\nu} = \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu}$ die übliche partielle Ableitung (durch Komma gekennzeichnet) darstellt,

erhalten wir allgemein

$$B^\mu_{;\nu} = B^\mu_{,\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu B^\sigma = B^\mu_{,\nu} + \Gamma_{00}^\mu B^0 + \Gamma_{01}^\mu B^1 = \frac{\partial B^\mu}{\partial t} + \frac{t}{1-t^2} B^\mu$$

$$B^0_{;1} = B^0_{,1} + \Gamma^0_{1\sigma} B^\sigma = B^0_{,1} + \Gamma^0_{10} B^0 + \Gamma^0_{11} B^1 = \frac{\partial B^0}{\partial \lambda} + (1-t^2)t B^1$$

$$B^1_{;0} = B^1_{,0} + \Gamma^1_{0\sigma} B^\sigma = B^1_{,0} + \Gamma^1_{00} B^0 + \Gamma^1_{01} B^1 = \frac{\partial B^1}{\partial t} - \frac{t}{1-t^2} B^1$$

$$B^1_{;1} = B^1_{,1} + \Gamma^1_{1\sigma} B^\sigma = B^1_{,1} + \Gamma^1_{10} B^0 + \Gamma^1_{11} B^1 = \frac{\partial B^1}{\partial \lambda} - \frac{t}{1-t^2} B^0$$

und speziell für $B^\mu = \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \arcsin t \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$

$$B^0_{;0} = \frac{A}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{1-t^2} B^0$$

$$B^0_{;1} = (1-t^2)t B^1$$

$$B^1_{;0} = -A\lambda \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + A\sqrt{1-t^2} \frac{d\lambda}{dt} - \frac{t}{1-t^2} B^1$$

$$B^1_{;1} = A\sqrt{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2} B^0$$

Krümmungs-Tensor

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad [\text{Schröder}]$$

$$R^m_{ikp} = \partial_p \Gamma^m_{ik} - \partial_k \Gamma^m_{ip} + \Gamma^r_{ik} \Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip} \Gamma^m_{rk} \quad [\text{Fließbach}]$$

REDUCE, eine Open Software für symbolische Formelmanipulation (siehe Anhang) liefert für die Variante von [Fließbach]:

$$R^0_{101} = -(1-t^2)$$

$$R^0_{110} = +(1-t^2)$$

$$R^1_{001} = +\frac{1}{1-t^2}$$

$$R^1_{010} = -\frac{1}{1-t^2}$$

alle anderen Komponenten sind Null.

Die Varianten von [Schröder] und [Fließbach] unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen des Krümmungstensors voneinander, das aber letztlich nur per Konvention so oder so gewählt wird. Manche bevorzugen das Vorzeichen, das bei positiver Krümmung auch einen positiven Krümmungsskalar liefert. Wir schließen uns dieser Sichtweise an.

Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\rho} = -R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \quad \text{laut [Schröder]}$$

$$R_{ij} = R^m_{imj} \quad \text{laut [Fließbach]}$$

Mit REDUCE erhalten wir

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & 0 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

und daraus den

Krümmungs-Skalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

der sich zu

$$R = \frac{2}{A^2}$$

ergibt.

Einstein-Tensor

Schließlich berechnen wir noch den Einstein-Tensor, der auf der linken Seite der Einsteinschen Feldgleichungen auftritt:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \quad \text{[Fließbach], [Schröder]}$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & 0 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{A^2} \begin{pmatrix} \frac{A^2}{1-t^2} & 0 \\ 0 & A^2(1-t^2) \end{pmatrix} = 0$$

Er verschwindet in der 2-dim Raum-Zeit ungeachtet der Vorzeichenwahl des Riemannschen Krümmungstensors in allen Komponenten.

Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Wenn die linke Seite, der Einstein-Tensor, gleich Null ist, verschwindet auch der Energie-Impuls-Tensor auf der rechten Seite (Vorzeichenwahl nach [Fließbach]). Es sind also weder Materie noch sonst irgendwelche Felder notwendig, um die hier vorgeschlagene Dynamik (Expansion + Kontraktion) der gekrümmten (!) 2-dim Raum-Zeit zu realisieren.

Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

mit τ Eigenzeit [Fließbach, Schröder] für Teilchen.

Für Photonen gibt es keine Eigenzeit, daher lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^\kappa}{dt^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \text{ mit } t \text{ als Bahnparameter.}$$

Nehmen wir an, dass pro Schritt $dx^0 = A d\phi = \frac{A}{\sqrt{1-t^2}} dt$ in Richtung Zeit (Weg entlang eines Längengrades der Kugeloberfläche während der Weiterbewegung der Ebene um dt durch die Kugel) maximal ein gleich langer Schritt $dx^1 = d(a\lambda)$ in Richtung Raum (entlang eines Breitenkreises) möglich ist, dann gilt für die Ausbreitung mit maximaler Geschwindigkeit (wie der des Lichtes) $\frac{dx^1}{dt} = \pm \frac{dx^0}{dt}$ mit x^0 in Richtung ϕ und x^1 in Richtung $\pm\lambda$. Daraus folgt eine konstante maximale Geschwindigkeit innerhalb der „Kreisumfangswelt“, jedoch eine variable maximale Geschwindigkeit auf der Kugeloberfläche (t, λ) .

Mehr Dimensionen

In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen der Variante von [Fließbach], wählen aber die Vorzeichen so, dass bei positiver Krümmung ein positiver Krümmungsskalar resultiert. Zur Herleitung der Metrik siehe [Egger]. Die weiteren Berechnungen erfolgen mit REDUCE unter Verwendung des Skripts im Anhang.

Krümmungs-Skalar

Dimension der Raum-Zeit	Koordinaten	Krümmungs-Skalar	Einstein-Tensor
2	t, λ_0	$\frac{2}{A^2}$	$G_{\mu\nu} = 0$
3	t, λ_0, λ_1	$\frac{6}{A^2}$	$G_{\mu\nu} \neq 0$
4	$t, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	$\frac{12}{A^2}$	$G_{\mu\nu} \neq 0$

Tabelle 2: Betrachtet man mehr als zwei Dimensionen für die Raum-Zeit, so vergrößern sich die Krümmungs-Skalare und die Einstein-Tensoren verschwinden nicht mehr.

Einstein-Tensor

Für die 3- und die 4-dimensionale Raum-Zeit verschwindet der Einstein-Tensor nicht mehr.

3-dim Raum-Zeit

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-t^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-t^2)\cos^2\lambda_0 \end{pmatrix} - \frac{3}{A^2} \begin{pmatrix} \frac{A^2}{1-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & A^2(1-t^2) & 0 \\ 0 & 0 & A^2(1-t^2)\cos^2\lambda_0 \end{pmatrix} =$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-t^2} & 0 & 0 \\ 0 & -(1-t^2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1-t^2)\cos^2\lambda_0 \end{pmatrix} \text{ in der } (t, \lambda_0, \lambda_1)\text{-Welt}$$

4-dim Raum-Zeit

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{1-t^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3(1-t^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1-t^2)\cos^2\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3(1-t^2)\cos^2\lambda_0\cos^2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

in der $(t, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ -Welt

Energie-Impuls-Tensor

Aus verschiedenen Quellen ([Fließbach], [Schröder], [Wiki]) entnehmen wir

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

mit

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$$

woraus sich im lokalen (mitbewegten) Ruhssystem (Minkowski-Raum-Zeit) mit

$$u^\mu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

der Energie-Impuls-Tensor zu

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

ergibt. Es bedeuten:

$$\rho \text{ Massendichte } \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right],$$

$$c \text{ Vakuum-Lichtgeschwindigkeit } \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ und}$$

$$p \text{ isotroper Druck } \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

für eine ideale „kosmische“ Flüssigkeit.

Mittels

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma}$$

erhalten wir daraus die kovariante Version, die wir in den Einsteinschen Feldgleichungen benötigen.

Einsteinsche Feldgleichungen

Wegen des veränderten Vorzeichens beim Krümmungstensor, ändern sich auch die Vorzeichen beim Ricci- und Einstein-Tensor und damit zwangsläufig das Vorzeichen auf der rechten Seite, falls weiterhin die Variante nach [Fließbach] gültig bleiben soll:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Schreiben wir

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

mit

$$\kappa = \text{Kopplungskonstante} \left[\frac{s^2}{kg\ m} \right],$$

wird die symbolische Handhabung etwas erleichtert. Spätestens jetzt müssen wir uns aber Gedanken über die Einheiten der einzelnen Größen machen.

Sehen wir uns beispielsweise den Energie-Impuls-Tensor an:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu},$$

der in dieser Form gerne heran gezogen wird um den Inhalt des Universums als „kosmische“ Flüssigkeit zu beschreiben.

c entspricht der maximal möglichen Ausbreitungsgeschwindigkeit, also der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, die nur innerhalb der Hyper-Oberflächenwelt konstant ist, sonst aber (in unserem Fall) variabel bleibt:

$$c = \frac{A}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sie entspricht der Geschwindigkeit $\frac{dx^0}{dt}$ eines ruhenden Beobachters bzw. Teilchens entlang der „Zeit“-Achse x^0

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \text{ bezieht sich auf } \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \arcsin t \\ \lambda(t) \end{pmatrix}, \text{ wobei wir } x^2 \text{ und } x^3 \text{ ignorieren und}$$

letztlich wegen des räumlich ruhenden Teilchens auch x^1 auf Null setzen.

Nun setzen wir $G_{00} = \kappa T_{00}$ und lösen nach ρ auf:

$$\rho = \frac{(A^2 \kappa p - 3)(1-t^2)^2 - A^4 \kappa p (1-t^2)}{A^6 \kappa} = \left(\frac{p}{A^4} - \frac{3}{A^6 \kappa} \right) (1-t^2)^2 - \frac{p}{A^2} (1-t^2)$$

Gleichsetzen von $G_{11} = \kappa T_{11}$ und Auflösen nach p ergibt

$$p = \frac{3}{A^2 \kappa}$$

und dies in das Ergebnis für ρ eingesetzt:

$$\rho = -\frac{3(1-t^2)}{A^4 \kappa}$$

Für $t=0$ folgt zunächst ein Zahlenwert von $\rho' \approx -5,119 \cdot 10^{-62} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}^2} \right]$, wobei allerdings

noch zu beachten wäre, dass die Größe $(1-t^2)$ ebenfalls passend zu den restlichen Einheiten, also in Sekunden anzugeben ist. Dann sieht der Zahlenwert wie folgt aus

$$\rho \approx -9,569 \cdot 10^{-27} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Die 1 in $(1-t^2)$ entspricht jetzt dem Alter des Universums $T_U \approx 13,7 \cdot 10^9 \text{ a} \approx 4,323 \cdot 10^{17} \text{ s}$ in Sekunden zum Quadrat, also

$$1 \rightarrow (T_U)^2 \approx 1,869 \cdot 10^{35} [\text{s}^2]$$

alles unter der Annahme, dass unser aktueller Zeitpunkt zu $t=0$ korrespondiert, wir uns also in einer Ära maximaler Ausdehnung unseres Kosmos befinden. Da ohnehin unsere Raum-Zeit extrem flach zu sein scheint, wäre das keine unberechtigte Annahme.

Der Druck p lautet zahlenmäßig

$$p = 8,6 \cdot 10^{-10} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

und bleibt konstant. Es gilt jeweils

$$p = -\rho c^2$$

womit wegen der variablen Maximalgeschwindigkeit c für den Ausgleich von Expansion und Kontraktion „gesorgt“ ist. Der Betrag von ρ entspricht für $t=0$ gerade der kritischen Massendichte, die für ein geschlossenes Universum gefordert wird.

Interpretationsversuch

Das vorgestellte Modell-Universum ist rein geometrischer Natur und besitzt eine inhärente Dynamik, die ein zunächst expandierendes und dann wieder kontrahierendes Universum zeitigt. Berechnet man nun aus dieser Geometrie einen Energie-Impuls-Tensor, so zeigt dieser, daß die vorgeschlagene Abfolge „Expansion – max.Ausdehnung – Kontraktion“ durch das Wechselspiel von negativer Energiedichte und konstantem positivem Druck realisiert werden könnte.

Genauso zulässig wäre aber auch die Sichtweise, daß ein Wechselspiel von positiver Energiedichte und konstantem negativem Druck statt findet, da sich beide ja jeweils exakt die Waage halten. Dazu hätten wir nur $G_{00} = -\kappa T_{00}$ und $G_{11} = -\kappa T_{11}$ für die Berechnung von ρ und p verwenden müssen.

Nehmen wir den globalen Ablauf „Expansion – max.Ausdehnung – Kontraktion“ als gegeben an, dann bedeutet die „reale“ Hinzunahme von Energie und Materie nach der ersten Sichtweise, daß zum negativen ρ etwas Positives addiert wird und ρ somit betragsmäßig kleiner wird. Dadurch wird die Expansionsrate verkleinert und wegen des konstanten positiven Drucks ein geschlossenes Universum favorisiert. Die zweite Sichtweise setzt dem konstanten negativen Druck ein vergrößertes positives ρ entgegen und bremst daher ebenfalls die Expansion ab, bzw. fördert die Kontraktion.

Zusammenfassung

In einem Gedankenexperiment wurde ein dynamischer 1-dimensionaler „Lebensraum“, hervorgegangen aus der 2-dimensionalen Raum-Zeit auf der Kugeloberfläche einer 3-dimensionalen Kugel mit Hilfe der üblichen Metrik-Operationen näher betrachtet.

Es zeigt sich, dass in einem leeren Universum eine gekrümmte 2-dim Raum-Zeit denkbar ist, die ein zunächst expandierendes und dann wieder kontrahierendes Universum beschreibt.

Die analoge Betrachtung höher dimensionaler Räume, insbesondere unserer 4-dim Raum-Zeit, liefert als Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen einen „passenden“ Energie-Impuls-Tensor. Die variable Expansionsrate ist dabei einer variablen negativen Energiedichte zu verdanken, die von einem konstanten positiven Druck in „Schach“ gehalten wird (oder umgekehrt).

Bei der maximalen Ausdehnung des Kosmos liegt die Massendichte dem Betrage nach nahezu perfekt an der sogenannten kritischen Massendichte, die heutzutage gefordert wird, damit sich das Universum wieder schließt.

Weitere Konsequenzen, die sich aus der hier dargestellten „Speziellen Metrik“ ergeben, finden sich in [Egger]. Hier sei nur erwähnt, daß auf Grund der inhärenten Beschleunigung (vergleiche Tabelle 1) auf eine scheinbare „Dunkle Materie“ und auf Grund von Rotverschiebungs- und Zeitdehnungseffekten auf eine scheinbare „Dunkle Energie“ geschlossen werden könnte.

Dank

an alle, die mir geholfen haben, diese Schrift zu erstellen.

Und last but not least „Gott sei Dank“.

Literatur

Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch, 2008

Egger D.: Hyper-Kugeln und ihre Oberflächen. Auf dem Weg zu einer anschaulichen Kosmologie?, Shaker, 2012

Fliessbach T.: Allgemeine Relativitätstheorie, 4.Auflage, Spektrum, 2003

Müller-Hoissen, Folkert: Skript für REDUCE zur Berechnung des Riemann-Tensors,
<http://wwwuser.gwdg.de/~fmuelle/Vorlss2002/edvp10.html>

REDUCE: Open Software für Computer Algebra Systeme
<http://reduce-algebra.sourceforge.net/>

Schröder U.E.: Gravitation, 3. Aufl., Harri Deutsch, 2004

Wikipedia-Links

<http://de.wikipedia.org/wiki/Dichteparameter>

http://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinsche_Feldgleichungen

<http://de.wikipedia.org/wiki/Energie-Impuls-Tensor>

Anhang

REDUCE

Mit Hilfe der Open Software REDUCE, erhältlich bei

<http://reduce-algebra.sourceforge.net/>

wurden einige Formeln (nach [Fließbach]) zur Berechnung von Krümmungs-Tensor usw. wie folgt ausgewertet

Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu})$$

Riemannscher Krümmungstensor:

$$R_{ikp}^m = \partial_p \Gamma_{ik}^m - \partial_k \Gamma_{ip}^m + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rp}^m - \Gamma_{ip}^r \Gamma_{rk}^m$$

Ricci-Tensor:

$$R_{ij} = R_{ijm}^m$$

Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}$$

und

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma}$$

Einsteinsche Feldgleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

bzw.

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

2-dim-Raum-Zeit

Das zugehörige Skript lautet (in REDUCE mit `in "metrik2.red"$` laden, falls das Skript in einer Datei namens `metrik2.red` steht, die Ausgabe findet sich dann in `metrik2.txt`):

```
% Berechnungen zu Metrik & Co.
% Gross- und Kleinschreibung werden nicht unterschieden

% Dimension der Raum-Zeit
n:=2$

% Koordinaten
OPERATOR X$
X(0):=t$
X(1):=lambda0$

DEPEND lambda0,t$
```

2-dim-Raum-Zeit

```
% Rules
trig1:={sin(~x)^2+cos(~x)^2=>1, cos(~x)^2+sin(~x)^2=>1};
let trig1;

% Prozeduren
procedure kovab(aa,bb);
begin;
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
  aa(I,J):=DF(bb(I),X(J))+FOR M:=0:n-1 SUM CHRIST(I,J,M)*bb(M)$
end;

procedure showMatrix(mm);
begin;
MATRIX hh(n,n)$
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
hh(I+1,J+1):=mm(I,J)$
write hh;
end;

procedure showVektor(vv);
begin;
MATRIX hh(n,1)$
FOR I:=0:n-1 DO
hh(I+1,1):=vv(I)$
write hh;
end;

% Vektoren
ARRAY U(n), V(n), LV(n), B(n), LB(n), BG(n)$

% Felder
ARRAY G(n,n), GINV(n,n), CHRIST(n,n,n), RIEM(n,n,n,n), RICCI(n,n), EINST(n,n)$
ARRAY UKV(n,n)$

% Berechnungen
% wahlweise maximalen Radius auf Eins setzen:
% a0:=1$
a:=a0*sqrt(1-t^2)$

% Ort
u(0):=a0*asin(t)$
u(1):=a*lambda0$

% Metrik (Indizes unten, kovariant)
G(0,0):=a0^2/(1-t^2)$
G(0,1):=0$
G(1,0):=0$
G(1,1):=a0^2*(1-t^2)$

% Inverse Metrik (Indizes oben, kontravariant)
MATRIX MG(n,n), MGINV(n,n)$
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO MG(I+1,J+1):=G(I,J)$
MGINV:=1/MG$
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO GINV(I,J):=MGINV(I+1,J+1)$

write "g=",mg;
write "ginv=",mginv;
write "g*ginv=",mg*mginv;

% Christoffel-Symbole
for k:=0:n-1 do for l:=0:n-1 do for m:=0:n-1 do
  CHRIST(k,l,m):=
    for i:=0:n-1 sum GINV(k,i)/2 *
      (DF(G(m,i),X(l)) + DF(G(l,i),X(m)) - DF(G(m,l),X(i)));

% Krümmungstensor
for m:=0:n-1 do for i:=0:n-1 do for k:=0:n-1 do for p:=0:n-1 do
RIEM(m,i,k,p) :=
  DF(CHRIST(m,i,k),X(p)) - DF(CHRIST(m,i,p),X(k))
  + FOR r:=0:n-1 SUM
    CHRIST(r,i,k)*CHRIST(m,r,p) - CHRIST(r,i,p)*CHRIST(m,r,k)$

% Ricci-Tensor
```

```

FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
  RICCI(I,J):=FOR M:=0:n-1 SUM RIEM(M,I,J,M)$
write "ricci=";
showMatrix(ricci);

% Krümmungs-Skalar
R:=FOR I:=0:n-1 SUM FOR J:=0:n-1 SUM GINV(I,J)*RICCI(I,J)$
write "r=",r;

% Einstein-Tensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO EINST(I,J):=RICCI(I,J)-R/2*G(I,J)$
write "einstein=";
showMatrix(einst);

% Ort
write "u=";
showVektor(u);

% Kovariante Ableitung von U
kovab(ukv,u)$
write "du/dt/dlambda0|kov=";
showMatrix(ukv);

% Geschwindigkeit
for k:=0:n-1 do v(k):=df(U(k),X(0))$
write "v=du/dt=";
showVektor(v);

% Lokale Geschwindigkeit in (x0,x1)
for k:=0:n-1 do LV(k):=V(k)/V(0)$
write "lv=dx1/dx0=";
showVektor(lv);

% max. Geschw.
Array vmax(n)$
vmax(0):=a0/sqrt(1-t^2)$
vmax(1):=a0/sqrt(1-t^2)$
write "vmax=dx0/dt=";
showVektor(vmax);

% Bewegungsgleichung
for k:=0:n-1 do
  BG(k):=-for m:=0:n-1 sum for n:=0:n-1 sum CHRIST(k,m,n)*vmax(m)*vmax(n)$
write "bew_gl=";
showVektor(bg);

% Lokale Beschleunigung in (x0,x1)
for k:=0:n-1 do LB(k):=1/V(0)*df(lv(k),x(0))$
write "lb=dlv/dx0/v0=";
showVektor(lb);

ON GCD;
ON DIV;

% Output wird Datei geschrieben
OUT "metrik2vf.txt";

% Metrik
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "G(",I,J,")=", G(I,J);

% Inverse Metrik
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "GINV(",I,J,")=", GINV(I,J);

% Christoffel-Symbole
FOR K:=0:n-1 DO FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
  WRITE "CHRIST(",K,I,J,")=", CHRIST(K,I,J);

% Krümmungstensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO FOR K:=0:n-1 DO FOR L:=0:n-1 DO
  WRITE "RIEM(",I,J,K,L,")=", RIEM(I,J,K,L);

% Ricci-Tensor:
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "RICCI(",I,J,")=", RICCI(I,J);

```

2-dim-Raum-Zeit

```
% Krümmungsskalar
write "R=",R;

% Einstein-Tensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "EINST(",I,J,")=",EINST(I,J);

% Vektor U
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "U(",I,")=", U(I);

% Kovariante Ableitung von U
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
  WRITE "dU/dt/dlambda0|kov(",I,J,")=",Ukv(I,J);

% Geschwindigkeit V
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "V(",I,")=", V(I);

% Lokale Geschwindigkeit in (x0,x1)
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "LV(",I,")=", LV(I);

% Beschleunigung
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "B(",I,")=", B(I);

% Lokale Beschleunigung in (x0,x1)
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "LB(",I,")=", LB(I);

% Bewegungsgleichung
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "BG(",I,")=", BG(I);

% Bewegungsgleichung
on factor;
FOR I:=0:n-1 DO WRITE "BG(",I,")=", BG(I);
off factor;

SHUT "metrik2vf.txt";
END;
```

4-dim-Raum-Zeit

Da der Einstein-Tensor in der 2-dim-Raum-Zeit verschwindet, müssen die Berechnungen von eben auf die 4-dim-Raum-Zeit ausgedehnt werden.

```
% Berechnungen zu Metrik & Co. nach Fliessbach

% Dimension der Raum-Zeit
n:=4$

% Koordinaten
OPERATOR X$
X(0):=t$
X(1):=lambda0$
X(2):=lambda1$
X(3):=lambda2$

% Vektoren
ARRAY U(n), V(n)$

% Ort (ruhend im Ursprung)
U(0):=A*asin(t)$
U(1):=0$
U(2):=0$
U(3):=0$

% Rules
trig1:={sin(~x)^2+cos(~x)^2=>1, cos(~x)^2+sin(~x)^2=>1};
let trig1;

% Prozeduren
procedure showMatrix(mmm);
begin;
MATRIX hh(n,n)$
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
```



```

hh(I+1,J+1):=mm(I,J)$
write hh;
end;

% Felder
ARRAY G(n,n), GINV(n,n), CHRIST(n,n,n), RIEM(n,n,n,n), RICCI(n,n), EINST(n,n)$
ARRAY EIT(n,n), ENI(n,n)$

% Metrik (Indizes unten)
G(0,0):=A^2/(1-t^2)$
G(0,1):=0$
G(0,2):=0$
G(0,3):=0$
G(1,0):=0$
G(1,1):=A^2*(1-t^2)$
G(1,2):=0$
G(1,3):=0$
G(2,0):=0$
G(2,1):=0$
G(2,2):=A^2*(1-t^2)*cos(lambda0)^2$
G(2,3):=0$
G(3,0):=0$
G(3,1):=0$
G(3,2):=0$
G(3,3):=A^2*(1-t^2)*cos(lambda0)^2*cos(lambda1)^2$

% Inverse Metrik (Indizes oben)
MATRIX MG(n,n), MGINV(n,n)$
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO MG(I+1,J+1):=G(I,J)$
MGINV:=1/MG$
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO GINV(I,J):=MGINV(I+1,J+1)$

write "g=",mg;
write "ginv=",mginv;
write "g*ginv=",mg*mginv;

% Geschwindigkeit
for i:=0:n-1 do v(i):=df(u(i),t)$

% max. Geschw.
Array vmax(n)$
svmax:=A/sqrt(1-t^2)$
for i:=0:n-1 do vmax(i):=svmax$
svmaxq:=svmax*svmax;

% Energie-Impuls-Tensor (eit, Indizes oben)
for i:=0:n-1 do for j:=0:n-1 do
  eit(i,j):=v(i)*v(j)*(p/svmaxq + rho) - p * ginv(i,j)$

% nur 2 Komp. behalten wegen der Übersichtlichkeit
for i:=2:n-1 do for j:=2:n-1 do eit(i,j):=0$

write "eit_kontravariant=";
showMatrix(eit);

% Energie-Impuls-Tensor (eni, Indizes unten, mit kappa)
for i:=0:n-1 do for j:=0:n-1 do
  eni(i,j) := - kappa *
    for k:=0:n-1 sum g(i,k) * for l:=0:n-1 sum g(j,l) * eit(k,l)$

write "eni=-kappa*eit_kovariant=";
showMatrix(eni);

% Christoffel-Symbole (nach Fliessbach)
for k:=0:n-1 do for l:=0:n-1 do for m:=0:n-1 do
  CHRIST(k,l,m) :=
    for n:=0:n-1 sum GINV(k,n)/2 *
      (DF(G(m,n),X(l)) + DF(G(l,n),X(m)) - DF(G(m,l),X(n)))$

% Krümmungstensor (nach Fliessbach)
for m:=0:n-1 do for i:=0:n-1 do for k:=0:n-1 do for p:=0:n-1 do
RIEM(m,i,k,p) :=
  DF(CHRIST(m,i,k),X(p)) - DF(CHRIST(m,i,p),X(k))
  + FOR r:=0:n-1 SUM

```

4-dim-Raum-Zeit

```
CHRIST(r,i,k)*CHRIST(m,r,p) - CHRIST(r,i,p)*CHRIST(m,r,k)$

% Ricci-Tensor (nach Fliessbach)
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
  RICCI(I,J):= FOR M:=0:n-1 SUM RIEM(M,I,M,J)$
write "ricci=";
showMatrix(ricci);

% Krümmungs-Skalar
R:= FOR I:=0:n-1 SUM FOR J:=0:n-1 SUM GINV(I,J)*RICCI(I,J)$
write "r=",r;

% Einstein-Tensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO EINST(I,J):=RICCI(I,J)-R/2*G(I,J)$
write "einstein=";
showMatrix(einst);

% Lösung der Feldgleichungen
write "-----Feldgleichungen-----";
on factor;
write "Massendichte=";
erho:=solve(eni(0,0)=einst(0,0),rho);
write "Druck=";
ep:=solve(eni(1,1)=einst(1,1),p);
off factor;
% erhop0:=sub(p=0,erho);
write "finale_Massendichte=";
ferho:=sub(ep,erho);
write "-----";

ON GCD;
ON DIV;

% Output wird in eine Datei geschrieben
OUT "metrik4vf.txt";

% Metrik
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "G(",I,J,")=", G(I,J);

% Inverse Metrik
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "GINV(",I,J,")=", GINV(I,J);

% Christoffel-Symbole
FOR K:=0:n-1 DO FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO
  WRITE "CHRIST(",K,I,J,")=", CHRIST(K,I,J);

% Krümmungstensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO FOR K:=0:n-1 DO FOR L:=0:n-1 DO
  WRITE "RIEM(",I,J,K,L,")=", RIEM(I,J,K,L);

% Ricci-Tensor:
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "RICCI(",I,J,")=", RICCI(I,J);

% Krümmungsskalar
write "R=",R;

% Einstein-Tensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "EINST(",I,J,")=", EINST(I,J);

% Energie-Impuls-Tensor
FOR I:=0:n-1 DO FOR J:=0:n-1 DO WRITE "-kappa*EIT(",I,J,")=", eni(I,J);

% Lösung der Feldgleichungen
write "-----Feldgleichungen-----";
on factor;
write "Massendichte=",erho;
write "Druck=",ep;
off factor;
write "finale_Massendichte=",ferho;
write "-----";

SHUT "metrik4vf.txt";
END;
```